

研究简报

一维换热器中温差场均匀性原则的证明

宋伟明, 孟继安, 梁新刚, 李志信

(清华大学航天航空学院, 热科学与动力工程教育部重点实验室, 北京 100084)

关键词: 换热器; 温差场均匀性原则; 焓耗散极值原理

中图分类号: TK 172

文献标识码: A

文章编号: 0438-1157 (2008) 10-2460-05

Demonstration of uniformity principle of temperature difference field for one-dimensional heat exchangers

SONG Weiming, MENG Ji'an, LIANG Xingang, LI Zhixin

(School of Aerospace of Tsinghua University, Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering, Ministry of Education, Beijing 10084, China)

Abstract: The uniformity principle of temperature difference field is a phenomenological principle, which has not been theoretically proved. For one-dimensional two-and three-stream heat exchangers, the extremum principle of entransy dissipation was used to optimize the heat transfer process by variational calculus. It was indicated that the temperature difference field between the hot and cold fluids should be completely uniform if the entransy dissipation reached a minimum for a given heat duty, or if the heat duty reached a maximum for a given entransy dissipation. So, the uniformity principle of temperature difference field of heat exchangers was primarily proved.

Key words: heat exchanger; uniformity principle of temperature difference field; extremum principle of entransy dissipation

引 言

能源是制约我国国民经济发展的一个关键问题, 随着工农业生产的迅速发展, 我国能源需求也迅速增加。与发达国家相比, 我国能源利用率低, 单位能源所创造的产值低, 能源浪费现象严重。因此如何提高能源利用率、节约能源, 是关系国民经济和社会发展的重要问题。工业节能是节能的重中之重, 换热器作为应用广泛的工业设备, 提高它的性能对提高能源利用率有十分重要的意义。

众所周知, 在换热器的设计中, 在其他条件相同时, 逆流换热器的效能总是比顺流换热器高, 又流换热器介于二者之间。过增元^[1]认为换热器效能高低的原因是换热器温差场的均匀性, 并唯象地提出了一种换热器优化设计的新方法——温差场均匀性原则。当换热器的传热单元数相同及冷、热流体热容量流比相同时, 换热器的温差场越均匀, 其效能越高。

为了表征换热器温差场的均匀性, Guo 等^[2]对二维问题定义了温差场均匀性因子

2008-04-14 收到初稿, 2008-05-16 收到修改稿。

联系人: 李志信。第一作者: 宋伟明 (1985—), 男, 博士研究生。

基金项目: 国家重点基础研究计划项目 (2007CB206901)。

Received date: 2008-04-14.

Corresponding author: Prof. LI Zhixin. E-mail: lizhx@tsinghua.edu.cn

Foundation item: supported by the National Basic Research Program of China (2007CB206901).

$$\phi = \frac{\int_0^W \int_0^L [T(x,y) - t(x,y)] dx dy}{\sqrt{WL} \int_0^W \int_0^L [T(x,y) - t(x,y)]^2 dx dy} \quad (1)$$

式中 $T(x,y)$ 和 $t(x,y)$ 分别为热流体和冷流体的温度, W 、 L 为换热器的宽度和长度。

过增元等^[2-3]、周森泉^[4]从最基本的传热关系式出发,推导出顺流、逆流及两种典型叉流换热器的温差场均匀性因子随传热单元数和热容量流比变化的解析表达式,并用数值方法求得了其他 7 种常用换热器的效能与温差场均匀性因子。郜时旺等^[5]提出了传热效能与温差场均匀性因子的关联式。可以验证,当传热单元数相同及冷、热流体热容量流比相同时,温差场越均匀,换热器的效能越高。在多股流换热器中,温差场均匀性原则也得到一定的验证^[6-7]。杨善让等^[8]利用温差场均匀性原则对多背压凝汽器进行优化,给出了多背压凝汽器各级传热面积分配。郜时旺等^[9]从理论上证明了温差场均匀性原则在多背压凝汽器中的正确性,给出了温差场均匀性因子与平均冷凝温度的关系式。郜时旺等^[10]还进一步说明了考虑传热系数变化时温差场均匀性原则的适用性。虽然温差场均匀性原则可以作为换热器性能的一个重要判据,并得到一定的验证,但它目前还只是一个唯象原理,有待于严格的证明。

1 焓耗散极值原理

基于传热过程没有效率的概念,同时根据热电比拟,Guo 等^[11]提出了一个新的物理量——焓,它表征物体传递热量的能力,定义式为

$$Z = \frac{1}{2}QT \quad (2)$$

并定义了物体单位体积内热量传递能力的损失——焓耗散

$$z_{\text{dis}} = q \cdot \nabla T \quad (3)$$

程新广^[12]将焓耗散的概念用于导热问题的优化,提出了导热过程优化的焓耗散极值原理:对于具有一定约束条件的导热系统,若给定热流边界条件,焓耗散最小时导热过程最优(温差最小);若给定温度边界条件,焓耗散最大时导热过程最优(热流最大)。应用焓耗散极值原理对体点问题的导热进行了优化,表明导热区域内的热导率分布使温度梯度处处均匀时导热过程最优,验证了焓耗散极值原理的正确性。

本文针对两股流和三股流一维换热器,在换热

器优化中引入焓耗散概念,将焓耗散极值原理用于换热器传热过程的优化,寻求冷流体温差场的最优分布,以证明温差场均匀性原则的正确性。

2 两股流一维换热器中温差场均匀性原则的证明

对于常见的顺流、逆流换热器以及一些工业上应用的管壳式换热器等,在一定程度上都可以简化为两股流换热问题。下面从两个角度来寻求换热器冷、热流体温差的最优分布,即当总换热量一定时,焓耗散取最小值时冷、热流体的温差场,以及当焓耗散一定时,换热量最大时冷、热流体的温差场。

两股流换热器中冷、热流体的温度沿程变化如图 1 所示,其中该股 1 为冷流体,该股 2 为热流体。它们在流动过程中与环境之间都没有热量交换,没有内热源,忽略流体与固壁沿流向的导热,换热器总的换热量即为冷、热流体之间的换热量。取一维换热器的宽度为 1m,则两股流换热器总的换热量可表示为

$$Q = \int_0^L k \Delta T(x) dx \quad (4)$$

式中 k 为换热器中的冷热流体间的传热系数,且为常数; L 为换热器的长度; $\Delta T(x)$ 为 x 处冷、热流体的局部温差。

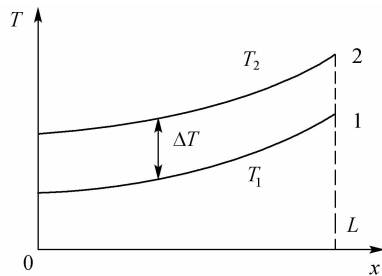


图 1 冷、热流体温度沿程变化示意图

Fig. 1 Schematic diagram of variations of hot and cold fluid temperatures along flow direction

两股流换热器中的焓耗散可以表示为

$$Z_{\text{dis}} = \int_0^L k [\Delta T(x)]^2 dx \quad (5)$$

将焓耗散极值原理应用于换热器中传热过程的优化,若给定任一流体的入口温度和换热量,可采用变分方法在换热器中的焓耗散最小的前提下寻找最优的冷、热流体间的温差场。

根据变分原理^[13],上面的优化目标相当于在约束条件“式(4)所表示的换热量一定”下求式

(5) 的极小值。作辅助泛函

$$H = \int_0^L \{ k[\Delta T(x)]^2 + \lambda k \Delta T(x) \} dx \quad (6)$$

其欧拉方程为

$$2k\Delta T(x) + \lambda k = 0 \quad (7)$$

即

$$\Delta T(x) = -\frac{1}{2}\lambda \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (4), 得

$$\lambda = -\frac{2Q}{kL} \quad (9)$$

$$\Delta T(x) = -\frac{1}{2}\lambda = \frac{Q}{kL} = \text{const} \quad (10)$$

可以证明, 式 (6) 关于 ΔT 的二阶导数大于零, 说明在两股流换热器中, 当换热量一定时, 熵耗散最小对应着冷、热流体的温度分布满足 ΔT 为常数, 即温差场完全均匀。也就是说, 在两股流换热器中, 冷、热流体的热容量流比相同时的逆流换热器最优。

同理, 对于给定熵耗散, 寻求换热量最大时的冷、热流体间的温差场, 相当于在约束条件“式 (5) 所表示的熵耗散一定”下求式 (4) 的极大值。作辅助泛函

$$H = \int_0^L \{ k\Delta T(x) + \lambda k [\Delta T(x)]^2 \} dx \quad (11)$$

其欧拉方程为

$$k + 2\lambda k \Delta T(x) = 0 \quad (12)$$

得

$$\Delta T(x) = -\frac{1}{2\lambda} \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (5), 得

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{kL}{Z_{\text{dis}}}} \quad (14)$$

$$\Delta T(x) = -\frac{1}{2\lambda} = \sqrt{\frac{Z_{\text{dis}}}{kL}} \quad (15)$$

可以证明, 式 (11) 关于 ΔT 的二阶导数小于零, 所以在两股流换热器中, 当熵耗散一定时, 换热量最大仍然对应着冷、热流体的温差场完全均匀。

以上分析表明, 在两股流换热器中, 不管是给定换热量寻求熵耗散最小, 还是给定熵耗散寻求最大换热量, 利用熵耗散极值原理均可得到冷、热流体的温差场完全均匀, 从而理论上证明了两股流换热器温差场均匀性原则的正确性。

3 三股流一维换热器中温差场均匀性原则的证明

与两股流换热器相比, 多股流换热器的分析要

复杂得多。下面以三股流换热器为例, 仍然从两个角度应用熵耗散原理优化换热器中冷、热流体的温差场。

三股流换热器中各股流温度沿程变化如图 2 所示, 其中该股 0 处在该股 1 和该股 2 之间, 为冷流体, 该股 1 和该股 2 为热流体。它们在流动过程中与环境之间都没有热量交换, 没有内热源, 同时忽略流体与固壁沿流向的导热, 换热器总的换热量即为各股流体之间的换热量。取一维换热器的宽度为 1m, 则三股流换热器总的换热量可表示为

$$Q = \int_0^L [k_1 \Delta T_1(x) + k_{II} \Delta T_{II}(x)] dx \quad (16)$$

式中 该股 0 和该股 1 之间的传热系数 k_1 以及该股 0 和该股 2 之间的传热系数 k_{II} 均为常数; L 为三股流换热器的长度; $\Delta T_1(x) = T_1(x) - T_0(x)$, $\Delta T_{II}(x) = T_2(x) - T_0(x)$, 分别为该股 1、2 与该股 0 在 x 处的局部温差。

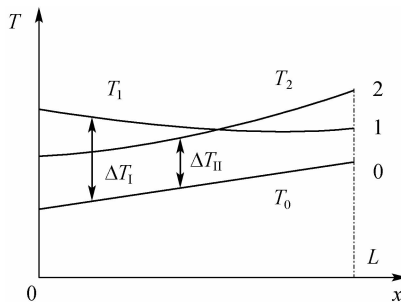


图 2 三股流换热器中各股流温度沿程变化示意图

Fig. 2 Schematic diagram of temperature variations of fluids along flow direction in three-stream heat exchanger

三股流换热器中总的熵耗散可以表示为

$$Z_{\text{dis}} = \int_0^L \{ k_1 [\Delta T_1(x)]^2 + k_{II} [\Delta T_{II}(x)]^2 \} dx \quad (17)$$

若给定任一股流体的入口温度, 当总的换热量一定时, 寻找最优的直接进行热交换的流体之间的温差场, 意味寻求换热器中的熵耗散最小。根据变分原理, 该优化问题相当于在约束条件“式 (16) 所表示的换热量一定”下求式 (17) 表示的熵耗散的极小值。作辅助泛函

$$H = \int_0^L \{ k_1 [\Delta T_1(x)]^2 + k_{II} [\Delta T_{II}(x)]^2 + \lambda [k_1 \Delta T_1(x) + k_{II} \Delta T_{II}(x)] \} dx \quad (18)$$

其欧拉方程为

$$\begin{cases} 2k_1 \Delta T_1(x) + \lambda k_1 = 0 \\ 2k_{II} \Delta T_{II}(x) + \lambda k_{II} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

所以

$$\Delta T_1(x) = \Delta T_{II}(x) = -\frac{1}{2}\lambda \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (16), 得

$$\lambda = -\frac{2Q}{(k_1 + k_{II})L} \quad (21)$$

$$\Delta T_1(x) = \Delta T_{II}(x) = \frac{Q}{(k_1 + k_{II})L} \quad (22)$$

可以证明, 式 (18) 关于 ΔT_1 和 ΔT_{II} 的二阶导数都大于零, 说明在三股流换热器中, 当换热器总的换热量一定时, 焓耗散最小对应着各股流体的温度分布满足 $\Delta T_1 = \Delta T_{II}$, 为常数, 即温差场完全均匀。上述优化后的三股流换热器, 温差场完全均匀对应于中间流体为冷 (热) 流体, 两侧均为热 (冷) 流体且按逆流布置。

同理, 若给定焓耗散, 应用焓耗散极值原理可寻求换热量最大时的直接进行热交换的流体之间的最优温差场。根据变分原理, 上述优化问题相当于在约束条件“式 (17) 所表示的焓耗散一定”下求式 (16) 所示的换热量的极大值。作辅助泛函

$$H = \int_0^L \{k_1 \Delta T_1(x) + k_{II} \Delta T_{II}(x) + \lambda k_1 [\Delta T_1(x)]^2 + \lambda k_{II} [\Delta T_{II}(x)]^2\} dx \quad (23)$$

其欧拉方程为

$$\begin{cases} k_1 + 2\lambda k_1 \Delta T_1(x) = 0 \\ k_{II} + 2\lambda k_{II} \Delta T_{II}(x) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

所以

$$\Delta T_1(x) = \Delta T_{II}(x) = -\frac{1}{2\lambda} \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (17) 中, 得

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(k_1 + k_{II})L}{Z_{dis}}} \quad (26)$$

$$\Delta T_1(x) = \Delta T_{II}(x) = \sqrt{\frac{Z_{dis}}{(k_1 + k_{II})L}} \quad (27)$$

可以证明, 式 (23) 关于 ΔT_1 和 ΔT_{II} 的二阶导数都小于零, 即在三股流换热器中, 当焓耗散一定时, 换热量最大对应着温差场完全均匀。

以上分析表明, 与两股流换热器类似, 在三股流换热器中, 不管是给定换热量寻求焓耗散最小, 还是给定焓耗散寻求最大换热量, 利用焓耗散极值原理均可得到冷、热流体的温差场完全均匀, 从而理论上证明了三股流换热器温差场均匀性原则的正确性。

4 结 论

利用焓耗散极值原理对两股流和三股一维换热器的传热过程进行优化, 证明对给定参数的流体进

行加热或冷却时, 不管是换热量一定时寻求焓耗散最小, 还是焓耗散一定时寻求换热量最大, 都应使冷、热流体的温差场完全均匀, 从而理论上初步证明了温差场均匀性原则的正确性。

符 号 说 明

- H ——泛函
 k, k_1, k_{II} ——传热系数, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
 L ——换热器长度, m
 Q ——换热量, W
 q ——热流密度, $W \cdot m^{-2}$
 T, T_0, T_1, T_2, t ——流体的温度, K
 $\Delta T, \Delta T_1, \Delta T_{II}$ ——温差, K
 ∇T ——温度梯度, $K \cdot m^{-1}$
 W ——换热器宽度, m
 Z ——焓, $W \cdot K$
 Z_{dis} ——焓耗散, $W \cdot K$
 z_{dis} ——单位体积的焓耗散, $W \cdot K \cdot m^{-3}$
 ϕ ——温差场均匀性因子
 λ ——Lagrange 乘子

下 角 标

- dis——耗散
 $0, 1, 2$ ——流股 0、1、2
 I, II ——换热面 I、II

References

- [1] Guo Zengyuan (过增元). Thermofluid Mechanics (热流体力学). Beijing: Tsinghua University Press, 1992: 294-299
- [2] Guo Zengyuan, Zhou Senquan, Li Zhixin, et al. Theoretical analysis and experimental confirmation of the uniformity principle of temperature difference field in heat exchanger. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2002, **45**: 2119-2127
- [3] Guo Zengyuan (过增元), Li Zhixin (李志信), Zhou Senquan (周森泉). Uniformity principle of temperature difference field in heat exchanger. *Science in China (Series E)* (中国科学 E 辑), 1996, **26** (1): 25-31
- [4] Zhou Senquan (周森泉). Uniformity principle of temperature difference field in heat exchanger and its applications [D]. Beijing: Tsinghua University, 1995
- [5] Gao Shiwang (郜时旺), Yang Mo (杨沫), Wei Shirang (危师让). Analysis of uniformity principle of temperature difference field in heat exchanger. *Journal of Xi'an Jiaotong University* (西安交通大学学报), 1999, **33** (1): 51-54
- [6] Xing Cheng (邢程), Liang Xingang (梁新刚), Li Zhixin (李志信). Uniformity factor of temperature difference field in multi-stream heat exchangers//Chinese Heat and Mass Transfer Conference. Nanjing, 2006

- [7] Lü Yanyan (吕岩岩), Cui Guomin (崔国民), Guo Jia (郭佳), *et al.* One dimensional uniformity factor of temperature difference field in multi-stream heat exchangers. *Journal of Chemical Industry and Engineering (China)* (化工学报), 2007, **58** (10): 2469-2473
- [8] Yang Shanrang (杨善让), Yang Mo (杨沫), Li Zhongbai (李中柏), *et al.* Analysis of multi-pressure condensers by uniformity principle of temperature difference field. *Journal of Engineering Thermophysics* (工程热物理学报), 1993, **14** (3): 313-316
- [9] Gao Shiwang (郜时旺), Yang Mo (杨沫), Xu Zhiming (徐志明), *et al.* Direct proof of uniformity factor of temperature difference field in multi-pressure condensers. *Journal of Engineering Thermophysics* (工程热物理学报), 1997, **18** (6): 741-743
- [10] Gao Shiwang (郜时旺), Yang Mo (杨沫), He Jianren (何坚忍), *et al.* Analysis of uniformity factor of temperature difference field in multi-pressure condensers when heat transfer coefficient is considered as variable. *Thermal Power Generation* (热力发电), 1998 (5): 32-35
- [11] Guo Zengyuan, Zhu Hongye, Liang Xingang. Entransy—a physical quantity describing heat transfer ability. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2007, **50**: 2545-2556
- [12] Cheng Xinguang (程新广). Entransy and its applications in heat transfer optimization [D]. Beijing: Tsinghua University, 2004
- [13] Wu Diguang (吴迪光). Calculus of Variations (变分法). Beijing: Higher Education Press, 1987: 91-98